

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**Instituto de Física de São Carlos**

**João Hiroyuki de Melo Inagaki**

**O conceito de *Quantum Speed Limits* e a geometrização  
do espaço de estados**

**São Carlos**  
**Julho de 2021**

**João Hiroyuki de Melo Inagaki**

**O conceito de *Quantum Speed Limits* e a geometrização  
do espaço de estados**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Graduação em Física do Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Frederico Borges de Brito

**Versão original**

**São Carlos  
Julho de 2021**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Inagaki, João Hiroyuki de Melo Inagaki

O conceito de Quantum Speed Limits e a geometrização do espaço de estados / João Hiroyuki de Melo Inagaki Inagaki; orientador Frederico Borges de Brito Brito -- São Carlos, 2021.

22 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharel em Física) -- Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2021.

1. Informação quântica. 2. Quantum speed limits. 3. Metrologia Quântica. I. Brito, Frederico Borges de Brito, orient. II. Título.

## RESUMO

INAGAKI, J. H. M. **O conceito de *Quantum Speed Limits* e a geometrização do espaço de estados**. Julho de 2021. 22p. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, Julho de 2021.

Os *Quantum Speed Limits* (QSLs), ou limites quânticos de velocidade, vêm se tornando uma ferramenta poderosa para analisar a dinâmica de sistemas quânticas por meio de limites fundamentais na evolução entre estados. Aplicações com respeito a limitações para o processamento de informação e otimização de dinâmicas de sistemas quânticos fechados e abertos motivam a formalização e exploração deste conceito. Em especial, a abordagem geométrica na busca de QSLs se propõe a construir os alicerces destes limites a partir da estrutura do espaço de estados. Neste trabalho de conclusão de curso, contextualizamos o problema de busca por QSLs e formalizamos a abordagem geométrica baseada no teorema de Morozova, Chentzov e Petz para estabelecermos uma família de QSLs válidos para dinâmicas unitárias e não-unitárias. Aplicamos esta formulação a um modelo não-unitário de *dephasing* de um qubit em contato com um grau de liberdade do ambiente com o fim de buscar relações entre os QSLs analisados.

**Palavras-chave:** Informação quântica. Quantum speed limits. Metrologia quântica.

## 1 INTRODUÇÃO

O início do século 20 foi marcado pelo profícuo desenvolvimento da mecânica quântica como fruto de uma revolução científica em curso. Neste momento, a nossa concepção de realidade física fora posta em cheque para dar lugar a uma nova forma de entender a natureza. Em especial, o princípio de incerteza de Heisenberg (1927) estabeleceu um limite fundamental no nosso conhecimento acerca de quantidades físicas. Na antiga mecânica ondulatória, a relação de incerteza posição-momento ( $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ ) relaciona a largura do pacote de onda no espaço da posição e momento, de forma que se a função de onda de uma partícula no espaço das posições for bem localizada, no espaço dos momentos ela será delocalizada, impossibilitando a medida simultânea destas duas quantidades. Na mecânica matricial, dados dois observáveis  $A$  e  $B$ , os seus desvios padrões são relacionados por  $\Delta A \Delta B \geq |\langle [A, B] \rangle|/2$ . Esta última relação é uma limitação no estado de preparação do sistema: não é possível construir um ensemble de sistemas quânticos em um estado de forma que viole o princípio de incerteza.

Outro princípio de incerteza, também introduzido por Heisenberg, é entre energia e tempo ( $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ ). Há de se notar que ao passo que  $\Delta E$  deva ser interpretado como o desvio padrão da hamiltoniana  $H$  para uma dinâmica, a quantidade  $\Delta t$  não possui este significado, visto que o tempo não é elevado ao patamar de operador na mecânica quântica, como acontece com posição, momento, entre outros<sup>1</sup>. Não obstante, uma interpretação comumente dada para o princípio de incerteza  $\Delta E \Delta t$  é de que uma medida da energia durante um tempo finito  $\Delta t$  carrega uma incerteza  $\Delta E$ . Entretanto, devido a falta de rigorosidade nos argumentos a favor dessa interpretação, outros modelos e derivações foram propostas para dar luz a essa característica da natureza quântica.

No espírito de buscar uma interpretação mais clara, Mandelstam e Tamm (MT) [1] derivaram uma expressão similar aquela proposta por Heisenberg. Desta vez, a desigualdade supracitada seria um limite inferior no tempo de evolução de um estado quântico inicial  $|\psi_0\rangle$  para um estado quântico final  $|\psi_\tau\rangle$  sobre uma dada dinâmica unitária independente do tempo. Este resultado foi explorado e estendido para dinâmicas dependentes do tempo em diversos trabalhos posteriores, inclusive, pondo a desigualdade sobre bases geométricas [2].

Cerca de 50 anos após a descoberta de MT, Margolus e Levitin (ML) [3] reportaram outro limite para o tempo de evolução sobre uma dada dinâmica. O resultado de ML, por sua vez, não recobra o resultado de MT e vice-versa. Assim, a existência de dois limites diferentes de igual validade impõe uma resposta paradoxal para a seguinte pergunta: quão rápido pode ser dada a evolução de um sistema quântico sujeito a uma dinâmica dada? Este é o objetivo principal na procura por QSLs, ou limites quânticos de velocidade.

<sup>1</sup> A dificuldade de encontrar um operador tempo foi posta inicialmente pelo chamado Teorema de Pauli em que se demonstra a impossibilidade de existência de tal operador para um sistema quântico cujo hamiltoniano  $H$  tem espectro discreto limitado inferiormente.

É natural que nos perguntemos quais seriam os limites para sistemas fechados dependentes do tempo, estados mistos e para sistemas abertos — governados por uma equação mestra. O entendimento deste limite quântico fundamental para uma dinâmica quântica pode nos fornecer *insights* no incremento da velocidade de computação e processamento de dados, interesse especial dentro de áreas de pesquisas bem estabelecidas, como a Informação e Computação Quântica, e de áreas crescentes, como a Termodinâmica Quântica [4]. A partir da década de 80 houve um florescimento da geometria da informação, congregando o conhecimento de geometria diferencial com a ciência de informação. Em especial, a conexão entre medidas de distinguibilidade de estados e distância no espaço de estados é feita. Para o caso quântico, o poderoso teorema de Morozova, Chentsov e Petz (MCP), nos permite encontrar uma família de métricas Riemannianas contrativas no espaço de estados, que nos viabiliza definir um número infinito de distâncias entre matrizes densidades distinta. Em um trabalho recente, por Pires *et al.* [5], foi possível construir uma família de QSLs geométricos univocativamente definidos pela família de métricas compatíveis com o teorema MCP. A grosso modo: o tempo mínimo de evolução para uma determinada métrica ocorre quando a dinâmica evolui sobre uma geodésica. É importante notar que, como há uma miríade de QSLs geométricos revelados por este trabalho, é preciso encontrar o QSL mais *tight* <sup>2</sup>.

A presente monografia está dividida como se segue. O Capítulo 2 será dedicado para a tarefa de definir os QSLs sobre bases teóricas firmes. Serão discutidos os resultados de MT e ML, o teorema de MCP, a contribuição recente de Pires [5] e QSLs referentes as métricas de Fisher e Wigner-Yanase, que serão de interesse especial para análises subsequentes. No Capítulo 3 iremos discutir o modelo de atenuação de fase paralela, conhecido como *dephasing*, para um sistema de dois níveis acoplado com um banho térmico. Será feita uma análise do QSL tanto para o sistema de dois níveis, quanto para o banho, este último sendo a contribuição original apresentada nesta monografia. Procuramos determinar o QSL mais *tight* entre as métricas mencionadas e compararemos os resultados para o qubit e para o banho (ambiente). Por fim, o Capítulo 4 resumirá nossos resultados e conclusões.

---

<sup>2</sup> Um QSL é mais *tight* que outro se fornece um limite inferior pro tempo de evolução menor.

## 2 QUANTUM SPEED LIMITS E A GEOMETRIA DO ESPAÇO DE ESTADOS

Neste capítulo desenvolveremos o entendimento dos QSLs sobre alicerces geométricos. Iremos explorar os resultados seminais que motivaram o estudo por QSLs geométricos (§2.1), explorar a classe de infinitas métricas possíveis para distinguibilidade de estados quânticos no espaço de estados por meio do teorema MCP (§2.2), e finalmente, definir os QSLs geométricos e explorar a dinâmica unitária por meio de resultados analíticos para as métricas de Fisher, Wigner-Yanase (§2.3).

### 2.1 Resultados seminais

O ponto de partida para a busca por Quantum Speed Limits é a tentativa de dar uma interpretação clara ao princípio de incerteza energia-tempo, pois em geral não é possível definir um operador tempo e utilizar o princípio de incerteza  $\Delta A \Delta B \geq |\langle [A, B] \rangle|/2$ .

O resultado de Mandelstam e Tamm [1], válido para dinâmicas unitárias independentes do tempo, utiliza o teorema de Ehrenfest,  $d\langle A \rangle/dt = \frac{i}{\hbar} \langle [H, A] \rangle$ . Assim, pode ser feita a conexão da relação de comutação  $[H, A]$  com a taxa de variação do valor esperado do operador  $A$ . Considere um estado inicial  $|\psi_0\rangle$  e um estado evoluído  $|\psi_\tau\rangle = U_\tau |\psi_0\rangle$ . Defina um projetor sobre o estado inicial  $A = |\psi_0\rangle \langle \psi_0|$  que possui a propriedade de idempotência  $A^2 = A$ . Podemos escrever  $\Delta A := \sqrt{\langle A \rangle - \langle A \rangle^2}$ , com o valor esperado sendo tomado com  $\langle A \rangle := \langle \psi_\tau | A | \psi_\tau \rangle = \langle \psi_0 | A | \psi_0 \rangle$ . A partir da relação de incerteza, obtemos:

$$\Delta H \geq \frac{\hbar}{2} \left| \frac{d\langle A \rangle/dt}{\sqrt{\langle A \rangle - \langle A \rangle^2}} \right| = \hbar \left| \frac{d}{dt} \arccos(|\langle \psi_0 | \psi(t) \rangle|) \right| \quad (2.1)$$

Utilizando a desigualdade  $\int_a^b |f(t)| dt \geq |\int_a^b f(t) dt|$  e integrando de 0 a  $t = \tau$ , obtemos:

$$\tau \geq \frac{\hbar}{\Delta H} \arccos(|\langle \psi_0 | \psi_\tau \rangle|) \quad (2.2)$$

Chamamos o lado direito da equação acima de  $\tau_{QSL}$  e estabelece um limite inferior para o tempo de evolução do estado  $|\psi_0\rangle$  ao estado  $|\psi_\tau\rangle$ . A equação 2.2 nos informa que é possível que haja uma dinâmica “mais eficiente” que liga estes dois estados, e esta dinâmica é aquela que satura a desigualdade. A dependência em  $\Delta H$  nos revela uma característica importante dos QSLs em geral: o limite inferior em  $\tau$  depende fortemente dos recursos físicos do sistema que estamos lidando. Neste caso, dentro da família de hamiltonianas com desvio padrão  $\Delta H$  fixo, o QSL de MT nos dá um limite na rapidez da evolução entre dois estados. Assim, os QSLs nos permite explorar a otimização de processos físicos que possuem vínculos em algumas quantidades físicas. Convém dois exemplos: (i) Estado inicial  $|\psi_0\rangle$  autoestado de energia,  $\Delta H = 0$  e portanto  $\tau_{QSL} \geq \infty$ , que reflete o fato que não existe hamiltoniana que evoluirá  $|\psi_0\rangle$  para o estado alvo  $|\psi_\tau\rangle$ ; (ii) Desvio padrão  $\Delta H \rightarrow \infty$  gera um  $\tau_{QSL} \rightarrow 0$  e portanto, poderíamos escolher uma dinâmica em que a evolução ocorra arbitrariamente rápida.

Em contrapartida, o resultado de Margolus e Levitin [3], 53 anos depois do QSL de MT, erradica a dependencia do QSL no desvio padrão da hamiltoniana e deriva um novo limite, agora em função do

valor esperado de  $H$ . Mais uma vez, considere uma dinâmica unitária gerada por uma hamiltoniana  $H$  independente do tempo, agora com autovalores positivos. Tome um estado  $|\psi_0\rangle = \sum_n c_n |E_n\rangle$  decomposto nos autoestado da energia e tome sua evolução temporal  $|\psi_\tau\rangle = \sum_n c_n \exp(-\frac{iE_n\tau}{\hbar}) |E_n\rangle$ . Consideraremos o caso em que  $\langle\psi_0|\psi_\tau\rangle = 0$ , ou seja, estado inicial e alvo ortogonais, assim tanto a parte real quanto imaginária desta quantidade são nulas.

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\langle\psi_0|\psi_\tau\rangle) &= \sum_n |c_n|^2 \cos\left(\frac{E_n\tau}{\hbar}\right) = 0 \\ \operatorname{Im}(\langle\psi_0|\psi_\tau\rangle) &= \sum_n |c_n|^2 \sin\left(\frac{E_n\tau}{\hbar}\right) = 0\end{aligned}\tag{2.3}$$

Usando a desigualdade  $\cos x \geq 1 - \frac{2}{\pi}(x + \sin x) \quad \forall x \geq 0$  na primeira das 2.3, encontramos:

$$\tau \geq \frac{\pi\hbar}{2\langle H \rangle}\tag{2.4}$$

É importante notar que este resultado vale apenas para evolução entre estados ortogonais. Desta vez o limite no tempo de evolução é sobre hamiltonianas com o mesmo valor médio  $\langle H \rangle$  para suas dinâmicas. Além disso, o resultado de ML é completamente independente do QSL de MT, ou seja, é impossível obter um a partir do outro. O fato de existirem dois limites independentes para o tempo de evolução entre dois estados não constitui um paradoxo, uma vez que os limites são sobre famílias de dinâmicas diferentes —  $\Delta H$  fixo ou  $\langle H \rangle$  fixo. De fato, Giovannetti, Lloyd e Maccone, em 2003, [6] mostraram numericamente que, dado estes vínculos energéticos, o tempo de evolução mínimo entre estados mistos, não-ortogonais, sob dinâmica unitária é dado por:

$$\tau_{QSL} = \max \left\{ \alpha(\epsilon) \frac{\pi\hbar}{2\Delta H}, \beta(\epsilon) \frac{\pi\hbar}{2\langle H \rangle} \right\}\tag{2.5}$$

Com  $\epsilon := F(\rho_0, \rho_\tau)$  a fidelidade de Uhlmann-Jozsa entre os estados inicial e final,  $\beta(\epsilon) = 2 \arccos(\sqrt{\epsilon})/\pi$  e  $\alpha(\epsilon)$  uma função que deve ser minimizada.

Além disso, um resultado similar para estados puros e ortogonais foi alcançado por Levitin e Toffoli [7]. O trabalho destes autores corrobora o descobrimento de Giovannetti *et al.* dando bases mais firmes a unificação do QSL de MT e ML:

$$\tau_{QSL} = \max \left\{ \frac{\pi\hbar}{2\Delta H}, \frac{\pi\hbar}{2\langle H \rangle} \right\}\tag{2.6}$$

O primeiro passo no sentido de uma geometrização dos QSLs foi dado por Anandan e Aharonov [2] tratando sistemas físicos puros com a hamiltoniana dependente do tempo evoluindo de acordo com a equação de Schrödinger. Antes disso, iremos revisar alguns conceitos matemáticos irão ser utilizados ao longo desta monografia.

Uma *distância* entre os pontos de um conjunto  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  deve satisfazer (i) Positividade  $\ell(a_i, a_j) \geq 0$ ; (ii) Simetria  $\ell(a_i, a_j) = \ell(a_j, a_i)$ ; (iii) Desigualdade triangular  $\ell(a_i, a_k) \leq \ell(a_i, a_j) +$



$\ell(a_j, a_k)$ . Estamos interessados em *distâncias Riemannianas*, que podem ser obtidas a partir da integração sobre uma curva da *métrica Riemanniana*. A *métrica*, por sua vez, é uma forma diferencial  $ds^2$  que indica como a distância entre pontos vizinhos devem ser medidos. Portanto, a distância entre dois pontos  $x$  e  $y$  induzidas pela métrica  $ds^2$  ao longo do caminho  $\gamma$  (com  $x$  e  $y$  seus extremos) é dado pela integral  $\ell(x, y) := \int_{\gamma} ds$ . A curva que minimiza o valor de  $\ell$  é chamada de *geodésica* e indicaremos-a por  $\mathcal{L}$ . Ao longo deste trabalho usaremos os termos “*métrica*” e “*métrica Riemanniana*” intercambiavelmente.

Gostaríamos de descrever uma distância entre o estado inicial  $|\psi_0\rangle$  e o estado alvo  $|\psi_\tau\rangle$ . Seja a diferencial de um vetor de estado dado por  $|d\psi\rangle = (\partial|\psi\rangle/\partial\theta)d\theta$  onde  $\theta$  é um parâmetro do estado  $|\psi\rangle$ . Uma métrica natural para o espaço de Hilbert é construída a partir da norma desta diferencial, ou seja,  $ds^2 = \langle d\psi|d\psi\rangle$ . Entretanto, essa métrica é não nula para estados colineares ( $|\psi_0\rangle$  e  $e^{i\nu}|\psi_0\rangle$ ,  $\nu \in \mathbb{R}$ ), que são fisicamente equivalentes (representam o mesmo estado). Precisamos de uma métrica que não distinga vetores colineares. Anandan e Aharonov fazem isso por meio da métrica de Fubini-Study no espaço projetivo:

$$ds^2 = \frac{\langle d\psi|d\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} - \frac{|\langle\psi|d\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle^2} \quad (2.7)$$

Resumidamente, estados colineares definem retas complexas passando pela origem do espaço de Hilbert e o conjunto destas retas gera o espaço projetivo. A relação  $|d\psi_t\rangle = |\psi_{t+dt}\rangle - |\psi_t\rangle$  e a equação de Schrödinger ( $i\hbar d_t|\psi_t\rangle = H_t|\psi_t\rangle$ ) nos dá:

$$ds^2 = \frac{dt^2}{\hbar^2} \Delta H_t^2 \quad (2.8)$$

com  $\Delta H_t := \sqrt{\langle\psi_t|H_t^2|\psi_t\rangle - \langle\psi_t|H_t|\psi_t\rangle^2}$  o desvio padrão da hamiltoniana.

Assim, o comprimento de qualquer trajetória entre os estados  $|\psi_0\rangle$  e  $|\psi_\tau\rangle$  será dado pela integração do elemento de linha  $ds$ , isto é,  $\ell(|\psi_0\rangle, |\psi_\tau\rangle) = \int_{\gamma} ds = \hbar^{-1} \int_0^\tau \Delta H_t dt$ . O QSL surge notando que qualquer comprimento de curva será maior ou igual a geodésica:

$$\mathcal{L}(|\psi_0\rangle, |\psi_\tau\rangle) \leq \ell(|\psi_0\rangle, |\psi_\tau\rangle) \quad (2.9)$$

Definindo a média temporal do desvio padrão como a quantidade  $\overline{\Delta H_t} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \Delta H_t$ , a equação acima pode ser escrita como:

$$\tau \geq \frac{\hbar}{\overline{\Delta H_t}} \mathcal{L}(|\psi_0\rangle, |\psi_\tau\rangle) \quad (2.10)$$

É possível encontrar uma fórmula analítica para a distância geodésica na métrica de Fubini-Study, dada por  $\mathcal{L}(|\psi_0\rangle, |\psi_\tau\rangle) = \arccos |\langle\psi_\tau|\psi_0\rangle|$ , assim, o resultado de Anandan e Aharonov é:

$$\tau \geq \frac{\hbar}{\overline{\Delta H_t}} \arccos |\langle\psi_\tau|\psi_0\rangle| \quad (2.11)$$

Mais uma vez, o limite inferior no tempo de evolução é dependente dos recursos energéticos disponíveis, expressado, desta vez, por  $\overline{\Delta H}$ . Ademais, este resultado recobra o de MT para hamiltonianas independentes do tempo. O resultado acima revela uma característica singular dos QSLs

geométricos: o menor tempo de evolução se dará com a saturação da 2.9, ou seja, se o sistema evoluir sobre uma geodésica. É sobre estas águas que o resultado de Pires [5] se banha, que será explorado no restante deste capítulo.

## 2.2 Medidas de distinguibilidade e teorema MCP

O resultado de Anandan e Aharonov fundamenta-se sobre uma importante tarefa na Informação Quântica: a análise da distinguibilidade entre estados quânticos. Em especial, a chamada geometria de informação pretende abordar este problema sobre o viés da geometria diferencial. Posto que tanto o conjunto de distribuição de probabilidades sobre o espaço de fases clássico quanto o conjunto de operadores densidade no espaço de Hilbert geram variedades Riemannianas, o problema de distinção de estados pode ser quantizado em medida de distâncias a partir de métricas definidas nestes espaços.

Exige-se que limitemos as métricas de interesse às métricas contrativas, uma vez que a aplicação de um mapa  $f$  sobre dois elementos de uma superfície Riemanniana clássica ou quântica  $x$  e  $y$ , introduz ruído que torna estes estados mais similares devido a perda de informação. Desta forma, a distância  $d$  induzida por uma métrica é tal que  $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ . Para o caso clássico, a dinâmica de uma distribuição discreta  $\vec{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_d\}$  no espaço de probabilidades  $\mathcal{P}$  é dada pela aplicação de um mapa estocástico. O teorema de Chentsov assegura que a chamada métrica de Fisher-Rao é a única escolha de métrica contrativa possível entre duas distribuições de probabilidades. Isto é, a distinguibilidade entre os estados  $\vec{p}$  e  $\vec{p} + d\vec{p}$ , onde  $d\vec{p} = \{dp_1, dp_2, \dots, dp_d\}$ , é dada pela métrica abaixo.

$$ds^2 = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^d \frac{(dp_j)^2}{p_j} \quad (2.12)$$

No caso quântico a dinâmica é dada por mapas CPTP (*Completely Positive and Trace Preserving*) aplicados em operadores densidade no espaço de Hilbert. Agora a escolha de métrica contrativa não é única pois, com efeito, há infinitas métricas sobre os operadores densidade. Desta vez, este resultado é assegurado pelo teorema de Morozova, Chentzov e Petz (MCP), que é enunciado logo abaixo, sem prova.

**Teorema de Morozova, Chentzov e Petz (MCP).** *Seja  $\mathcal{H}$  o espaço de Hilbert de dimensão finita  $d$  e seja  $S \subset \mathcal{H}$  o conjunto de operadores densidade  $\rho$  que satisfazem as seguintes propriedades: (i) Hermiticidade  $\rho = \rho^\dagger$ ; (ii) Unitaridade do traço  $\text{Tr}(\rho) = 1$ ; (iii)  $\rho$  é semipositivo definido  $\rho \geq 0$ . Considere um operador densidade  $\rho$  e  $d\rho$ , tais que  $d\rho = d\rho^\dagger$  e  $\text{Tr}(d\rho) = d\text{Tr}(\rho) = 0$ . Além disso, leve em conta a decomposição espectral  $\rho = \sum_{j=1}^d |j\rangle \langle j|$  do operador densidade, então a métrica Riemanniana contrativa no espaço de estados, ou seja, a distância entre os operadores vizinhos  $\rho$  e*

$\rho + d\rho$ , é dada pela fórmula:

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left[ \sum_{j=1}^d \frac{|\langle j | d\rho | j \rangle|^2}{p_j} + 2 \sum_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^2 c_f(p_j, p_l) |\langle j | d\rho | l \rangle|^2 \right] \quad (2.13)$$

Onde

$$c_f(x, y) := \frac{1}{y f(x/y)} \quad (2.14)$$

e  $f(u)$  pertence a classe de funções de Morozova-Chentzov (MC), ou seja, funções  $f(u) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  com as propriedades abaixo:

- (i) Para operadores densidade  $\rho$  e  $\sigma$  tais que  $\rho \leq \sigma$ , então  $f(\rho) \leq f(\sigma)$
- (ii)  $f(u) = u f(1/u)$
- (iii)  $f(1) = 1$

A equação 2.13 tem como característica principal a separação entre as populações e coerências dos estados envolvidos. O primeiro termos depende das populações de  $\rho$  e  $d\rho$  e é facilmente reconhecível como a métrica de Fisher clássica na Eq. 2.12. O segundo termo conta com a contribuição das coerências de  $d\rho$  na base dos autoestados de  $\rho$  e é responsável pela não unicidade da métrica. É importante frisar que este termo é puramente quântico.

Note que este teorema lida com operadores densidades, portanto, para fazer a conexão com a métrica de Fubini-Study para funções de estado, discutida na seção passada, recorreremos ao trabalho de 1996 de Petz e Sudár. Um dos resultados principais deste trabalho é o colapso de todas as métricas contrativas em um múltiplo da métrica de Fubini-Study no caso de estados puros. De todo modo, focaremos em estados mistos, já que são as coerências que permitem a infinidade de métricas no espaço de estados.

Outra propriedade importante é que a Eq. 2.13 é uma correspondência unívoca com as funções de MC. Existe uma desigualdade sobre essa classe de funções, em que, para  $f(u)$  uma função de MC arbitrária vale  $f_{\min}(u) \leq f(u) \leq f_{\max}(u)$ , onde a função mínima é dada por:

$$f_{\min}(u) = \frac{2u}{1+u} \quad (2.15)$$

E a função máxima é:

$$f_{\max}(u) := f_{QF}(u) = \frac{1+u}{2} \quad (2.16)$$

Neste trabalho estaremos interessados em apenas duas destas funções. A primeira é a  $f_{\max}$  cuja métrica correspondente é a métrica de Fisher Quântica (QF). A segunda está relacionada com a métrica de Wigner-Yanase (WY) e é dada por.

$$f_{WY}(u) := \frac{1}{4}(\sqrt{u} + 1)^2 \quad (2.17)$$

A escolha destas duas funções se deve ao fato de serem as únicas com expressões analíticas para a geodésica entre dois operadores densidades. Encontrar a geodésica é, em geral, uma tarefa complexa. Entretanto vale notar que, em decorrência do Teorema de MCP, quaisquer outras escolhas de funções de MC seriam válidas para as análises subsequentes desde que suas geodésicas sejam calculáveis. Além disso, as duas métricas escolhidas são as mais extensivamente exploradas na literatura de informação quântica, e portanto, possui aplicações já conhecidas.

A geodésica associada a métrica de Fisher Quântica é conhecida como ângulo de Bures e é dada por:

$$\mathcal{L}^{QF}(\rho_1, \rho_2) = \arccos\left(\sqrt{F(\rho_1, \rho_2)}\right) \quad (2.18)$$

Onde  $F$  é a fidelidade Uhlman-Jozsa:

$$F(\rho_1, \rho_2) := \left( \text{Tr} \left[ \sqrt{\sqrt{\rho_1} \rho_2 \sqrt{\rho_1}} \right] \right)^2 \quad (2.19)$$

Por outro lado, a geodésica associada a métrica de Wigner-Yanase é dada por:

$$\mathcal{L}^{WY}(\rho_1, \rho_2) = \arccos(A(\rho_1, \rho_2)) \quad (2.20)$$

Em que  $A$  é chamada afinidade quântica:

$$A(\rho_1, \rho_2) := \text{Tr}(\sqrt{\rho_1} \sqrt{\rho_2}) \quad (2.21)$$

## 2.3 QSLs geométricos

O resultado principal do trabalho de Pires [5] é apresentado a seguir. Considere um estado  $\rho_\lambda$  parametrizado pelo conjunto  $\lambda = \{\lambda_\mu\}_{\mu=1,\dots,r}$  que variam analiticamente. Suponha uma dinâmica que varia o conjunto de parâmetros  $\lambda$  de um estado inicial  $\rho_0 := \rho_{\lambda_I}$  a um estado final  $\rho_{\lambda_F}$ . A variação dos parâmetros irá descrever uma curva  $\gamma$  no espaço de estados cujo comprimento será denotado por  $\ell_\gamma(\rho_{\lambda_I}, \rho_{\lambda_F})$ . De acordo com o teorema de MCP, há uma infinidade de métricas Riemmanianas contrativas — dependentes da escolha da função de  $f$  de MC — cuja integração entre os estados inicial e final sobre o conjunto de parâmetros  $\lambda$  nos dará o comprimento citado, ou seja,  $\ell_\gamma^f(\rho_{\lambda_I}, \rho_{\lambda_F}) = \int_\gamma ds$ , onde  $ds^2 = g_{\rho_\lambda}^f(d\rho_\lambda, d\rho_\lambda)$  dada pela Eq. 2.13.

Vamos considerar  $\rho_\lambda + d\rho_\lambda$ , o estado gerado após uma variação infinitesimal dos parâmetros  $\lambda$  a partir do estado  $\rho_\lambda$ . O operador  $d\rho_\lambda$  é hermitiano, de traço nulo, e dado por:

$$d\rho_\lambda = \sum_{\mu=1}^r \partial_\mu \rho_\lambda d\lambda_\mu \quad (2.22)$$

onde  $\partial_\mu \rho_\lambda = \frac{\partial \rho_\lambda}{\partial \lambda_\mu}$ . É justamente a norma deste operador,  $\|d\rho_\lambda\|$ , que define a distância  $ds$  entre os estados  $\rho_\lambda$  e  $\rho_\lambda + d\rho_\lambda$ , isto é,  $ds^2 = \|d\rho_\lambda\|^2$ . Focaremos agora em calcular os termos  $|\langle j | d\rho_\lambda | j \rangle|^2$  e

$|\langle j| d\rho_\lambda |l\rangle|^2$ , que aparecem na Eq. 2.13. Suponha a decomposição espectral de  $\rho_\lambda$  como:

$$\rho_\lambda = \sum_j p_j |j\rangle \langle j| \quad (2.23)$$

Portanto:

$$\partial_\mu \rho_\lambda = \sum_j (\partial_\mu p_j) |j\rangle \langle j| + p_j (\partial_\mu |j\rangle) \langle j| + p_j |j\rangle (\partial_\mu \langle j|) \quad (2.24)$$

já que os autovalores e autovetores de  $\rho_\lambda$  dependem do conjunto de parâmetros  $\lambda$ . Utilizando a identidade  $(\partial_\mu \langle j|l\rangle) = -\langle j| \partial_\mu |l\rangle$ , decorrente de  $\langle j|l\rangle = \delta_{jl}$ , segue que:

$$\langle j| \partial_\mu \rho_\lambda |l\rangle = \delta_{jl} \partial_\mu p_j + (p_l - p_j) \langle j| \partial_\mu |l\rangle \quad (2.25)$$

Finalmente, a partir das Eqs. 2.22 e 2.25

$$\begin{aligned} \langle j| d\rho_\lambda |l\rangle &= \sum_{\mu=1}^r \langle j| \partial_\mu \rho_\lambda |l\rangle d\lambda_\mu \\ &= \sum_{\mu=1}^r [\delta_{jl} \partial_\mu p_j + i(p_j - p_l) \mathcal{A}_{jl}^\mu] d\lambda_\mu \end{aligned} \quad (2.26)$$

Onde  $\mathcal{A}_{jl}^\mu := i \langle j| \partial_\mu |l\rangle$ . Fazendo  $j = l$  temos:

$$|\langle j| d\rho_\lambda |j\rangle|^2 = \sum_{\mu, \nu=1}^r \partial_\mu p_j \partial_\nu p_j d\lambda_\mu d\lambda_\nu \quad (2.27)$$

Para  $j \neq l$  ficamos com:

$$|\langle j| d\rho_\lambda |l\rangle|^2 = \sum_{\mu, \nu=1}^r (p_j - p_l)^2 \mathcal{A}_{jl}^\mu \mathcal{A}_{lj}^\nu d\lambda_\mu d\lambda_\nu \quad (2.28)$$

As duas equações acima na 2.13 nos dão:

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=1}^r g_{\mu\nu}^f d\lambda_\mu d\lambda_\nu \quad (2.29)$$

onde  $g_{\mu\nu}^f = \mathcal{F}_{\mu\nu} + \mathcal{Q}_{\mu\nu}^f$ . O termo  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  é comum a todas as métricas Riemmanianas contrativas no espaço de estados e se refere a contribuição das populações de  $\rho_\lambda$ :

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} := \frac{1}{4} \sum_{j=1}^d \frac{\partial_\mu p_j \partial_\nu p_j}{p_j} \quad (2.30)$$

O termo  $\mathcal{Q}_{\mu\nu}^f$  é a contribuição das coerências de  $d\rho_\lambda$  e, por depender da escolha da função  $f$  de MC, corresponde a propriedade de não-unicidade das métricas no espaço de estados:

$$\mathcal{Q}_{\mu\nu}^f := \frac{1}{2} \sum_{\substack{j, l=1 \\ j < l}}^d c_f(p_j, p_l) (p_j - p_l)^2 \mathcal{A}_{jl}^\mu \mathcal{A}_{lj}^\nu \quad (2.31)$$

Consideremos que o conjunto de parâmetros  $\lambda$  é dependente do tempo. Para uma evolução dada para tempo  $t \in [0, \tau]$ ,  $\lambda \rightarrow \lambda(t)$  o comprimento da curva  $\gamma$  descrito no espaço de estados devido a evolução do operador densidade do seu estado inicial  $\rho_0 := \rho_{\lambda_I} := \rho_{\lambda(0)}$  até o estado final  $\rho_\tau := \rho_{\lambda_F} := \rho_{\lambda(\tau)}$  será dado por:

$$\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau) = \int_\gamma ds = \int_0^\tau dt \frac{ds}{dt} = \int_0^\tau dt \sqrt{\sum_{\mu, \nu=1}^r g_{\mu\nu}^f \frac{d\lambda_\mu}{dt} \frac{d\lambda_\nu}{dt}} \quad (2.32)$$

O comprimento do caminho  $\gamma$  que liga os estados inicial e final deve ser, por definição, maior ou igual que a distância geodésica  $\mathcal{L}^f(\rho_0, \rho_\tau)$  que liga estes estados. Este é o resultado principal que define os QSLs geométricos:

$$\mathcal{L}^f(\rho_0, \rho_\tau) \leq \ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau) \quad (2.33)$$

O limite inferior para o tempo de evolução  $\tau$  deverá ser obtido com a solução da desigualdade acima a partir de expressões analíticas para  $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$  e  $\mathcal{L}^f(\rho_0, \rho_\tau)$ . Sendo assim, a saturação da desigualdade se dá apenas se a evolução ocorre sobre a geodésica, tal qual o QSL obtido por Anandan e Aharonov obtido na seção 2.1.

Convém lembrarmos que, assim como o comprimento  $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$  depende da escolha da função  $f$  de MC, a distância geodésica  $\mathcal{L}^f(\rho_0, \rho_\tau)$  também, nos fornecendo uma infinidade de QSLs. Para buscarmos o QSL mais *tight*, introduzimos a distância relativa  $\delta_\gamma^f$ , que quantifica o quanto o comprimento  $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$  difere de  $\mathcal{L}^f(\rho_0, \rho_\tau)$ :

$$\delta_\gamma^f := \frac{\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau) - \mathcal{L}^f(\rho_0, \rho_\tau)}{\mathcal{L}^f(\rho_0, \rho_\tau)} \quad (2.34)$$

Assim, para uma dada dinâmica, a métrica mais *tight* é aquela que minimiza a quantidade  $\delta_\gamma^f$ , pois o comprimento da curva  $\gamma$  gerada pela dinâmica é o mais próxima possível da distância geodésica relativa a esta métrica. Como explicitado na seção 2.2, não há expressões analíticas para  $\mathcal{L}^f(\rho_0, \rho_\tau)$  para todas as métricas derivadas da classe de funções de MC, exceto para as métricas de Fisher Quântica e de Wigner-Yanase. Nas análises subsequentes, exploraremos qual destas métricas é a mais *tight* para uma dada dinâmica, ou seja, se  $\delta^{QF} \leq \delta^{WY}$ , ou se  $\delta^{WY} \leq \delta^{QF}$ .

Até agora interpretamos os QSLs geométricos seguindo a linha de raciocínio a seguir: (i) Tome uma dinâmica arbitrária (unitária ou não-unitária) e deixe um operador densidade evoluir de um estado inicial  $\rho_0$  a um estado alvo  $\rho_\tau$  durante uma quantidade de tempo  $\tau$  (ii) Pela 2.33, o comprimento  $\ell_\gamma^f(\rho_0, \rho_\tau)$  da trajetória descrita no espaço de estados é sempre maior ou igual a distância geodésica  $\mathcal{L}^f(\rho_0, \rho_\tau)$ , deve existir uma outra dinâmica que leva  $\rho_0$  a  $\rho_\tau$  durante uma quantidade de tempo  $\tau_{QSL} \leq \tau$  (iii) O caminho que esta nova dinâmica traça é uma geodésica (iv) Para encontrar o menor  $\tau_{QSL}$  possível entre estes dois estados, é necessário minimizar a quantidade  $\delta_\gamma^f$  dada pela 2.34.

O raciocínio acima ainda não evidencia a potencialidade dos QSL na otimização de dinâmicas com vínculos sobre recursos físicos. Faremos isso para dinâmicas unitárias. Seja  $\rho_0$  um estado inicial

e uma hamiltoniana  $H_t$  dependente do tempo, que gera a dinâmica. O estado evoluído será dado por  $\rho_t = U_t \rho_0 U_t^\dagger$ , onde o operador unitário  $U_t$  é encontrado a partir da equação de Schrödinger  $i\hbar \partial_t U_t = H_t U_t$ . Como a dinâmica é parametrizada apenas pelo tempo, ou seja  $\lambda = \{t\}$ , ficamos com:

$$\mathcal{F}_t = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^d \left( \frac{dp_j}{dt} \right)^2 \frac{1}{p_j}, \quad \mathcal{Q}_t^f = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,l=1 \\ j < l}}^d c_f(p_j, p_l) (p_j - p_l)^2 \mathcal{A}_{jl}^t \mathcal{A}_{lj}^t \quad (2.35)$$

Os autovalores  $p_j$  do estado inicial sob evolução unitária são constantes, portanto  $\mathcal{F}_t = 0$ . Além disso, podemos ver que, para  $j \neq l$ ,  $\mathcal{A}_{jl}^t = (1/\hbar) \langle j | \delta H_t | l \rangle$ , com  $\delta H_t := H_t - \langle H_t \rangle \mathbb{I}$ . Portanto, o elemento de linha a ser integrado é:

$$g_t^f = \frac{1}{2\hbar^2} \sum_{\substack{j,l=1 \\ j < l}} c_f(p_j, p_l) (p_j - p_l)^2 v \langle j | \delta H_t | l \rangle \langle l | \delta H_t | j \rangle \quad (2.36)$$

Façamos agora a escolha da função de MC dada pela Eq. 2.16, que corresponde a métrica de Fisher Quântica. A Eq. 2.14 fica  $c_f(x, y) = 2/(x + y)$  e daí a Eq. 2.36 se resume em:

$$\begin{aligned} g_t^{QF} &= \frac{1}{2\hbar^2} \sum_{\substack{j,l=1 \\ j < l}} \frac{(p_j - p_l)^2}{p_j + p_l} v \langle j | \delta H_t | l \rangle \langle l | \delta H_t | j \rangle \\ &\leq \frac{1}{2\hbar^2} \sum_{\substack{j,l=1 \\ j < l}} (p_j + p_l) v \langle j | \delta H_t | l \rangle \langle l | \delta H_t | j \rangle \\ &\quad \frac{(p_j - p_l)^2}{p_j + p_l} \leq p_j + p_l \end{aligned} \quad (2.37)$$

A análise da soma acima nos  $g_t^{QF} \leq \frac{1}{\hbar^2} (\Delta H_t)^2$ , onde  $\Delta H_t = \sqrt{\langle H_t^2 \rangle - \langle H_t \rangle^2}$  é o desvio padrão da hamiltoniana calculada para o estado  $\rho_t$ . Tirando a raiz quadrada e integrando a expressão acima, ficamos com:

$$\ell^{QF}(\rho_0, \rho_\tau) \leq \frac{1}{\hbar} \int_0^\tau dt \Delta H_t \quad (2.38)$$

O nosso QSL poderá ser obtido utilizando a Eq. 2.33:

$$\mathcal{L}^{QF}(\rho_0, \rho_\tau) \leq \frac{1}{\hbar} \int_0^\tau dt \Delta H_t \quad (2.39)$$

Onde  $\mathcal{L}^{QF}(\rho_0, \rho_\tau)$  é dado pela 2.18. Mais evidentemente, definindo a média temporal do desvio padrão como  $\overline{\Delta H_t} := \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \Delta H_t$ , finalmente observamos os QSLs como uma poderosa ferramenta na otimização de dinâmicas com limitações sobre seus recursos físicos:

$$\tau \geq \frac{\hbar}{\overline{\Delta H_t}} \mathcal{L}^{QF}(\rho_0, \rho_\tau) \quad (2.40)$$

Por outro lado, a escolha da métrica de Wigner-Yanase, dada pela função de MC da Eq. 2.17, ao realizarmos cálculos similares<sup>1</sup> irão nos dar:

$$\tau \geq \frac{\hbar}{\sqrt{2\sqrt{\mathcal{I}}}} \mathcal{L}^{WY}(\rho_0, \rho_\tau) \quad (2.41)$$

<sup>1</sup> Consulte [5] e [8] para mais detalhes.

Onde  $\mathcal{L}^{WY}$  é dado pela Eq. 2.20, com  $\overline{\sqrt{\mathcal{I}}} := \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \sqrt{\mathcal{I}(\rho_t, H_t)}$ , e onde  $\mathcal{I}(\rho_t, H_t)$  é chamada de Informação de Wigner-Yanase. Aqui podemos ver que os recursos físicos podem ser informacionais e não apenas energéticos, como é o caso da Eq. 2.40.



### 3 ESTUDO DE CASO: DEPHASING PARA UM SISTEMA DE 2 NÍVEIS

Seguiremos, neste capítulo, com uma aplicação do maquinário teórico adquirido na seção anterior realizando uma análise do QSL para uma dinâmica não-unitária, no contexto de sistemas quânticos abertos. Faremos primeiramente uma descrição do modelo de *dephasing* pra um qubit (§3.1) e em seguida discutiremos os QSLs para o qubit e para o ambiente (§3.2). Convém deixar claro que o objetivo das análises subsequentes é a busca de possíveis correlações qualitativas entre os QSLs mais *tight* para dois sistemas interagentes (qubit e ambiente).

#### 3.1 Descrição do modelo

Focaremos no modelo de atenuação de fase paralela, ou *dephasing*, para um qubit (sistema de 2 níveis) em um campo de bósons (ambiente). Justifica-se a escolha deste modelo por ele possuir uma solução analítica e apresenta decoerência sem que ocorra dissipação de energia, podendo assim, explorar os efeitos da decoerência pura. A dinâmica do qubit + ambiente é dada por [9]:

$$H = \underbrace{\frac{1}{2}\sigma_z\omega_0 + \sum_k b_k^\dagger b_k \omega_k}_{H_0} + \underbrace{\sum_k \sigma_z (g_k b_k^\dagger + g_k^* b_k)}_{H_{int}} \quad (3.1)$$

Aqui,  $b_k$  e  $b_k^\dagger$  são os operadores aniquilação e criação para o  $k$ -ésimo modo do campo, respectivamente. Seja  $|n\rangle_k$  o estado que indica que o modo  $k$  possui número de ocupação  $n$ , portanto  $b_k |n\rangle_k = \sqrt{n} |n-1\rangle_k$  e  $b_k^\dagger |n\rangle_k = \sqrt{n+1} |n+1\rangle_k$ . As relações de comutação são  $[b_k, b_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}$  e  $[b_k^\dagger, b_{k'}^\dagger] = [b_k, b_{k'}] = 0$ . O termo  $H_0$  nos dá a evolução livre do qubit e do ambiente e o termo  $H_{int}$  descreve a interação entre estes sistemas, com  $g_k$  as constantes de acoplamento. Note que, pelo fato de  $H_{int}$  comutar com  $H_0$ , o termo de interação não gera transições de níveis de energia no qubit, o que evidencia que, sob esta interação, não há troca de energia entre o qubit e o ambiente. A evolução temporal do sistema qubit + ambiente é dada por um operador unitário. Convém enunciar-lhe na versão de interação, onde ele toma a forma:

$$\tilde{U}(t) = \exp\left(\frac{1}{2}\sigma_z \sum_k \alpha_k(t) b_k^\dagger - \alpha_k^*(t) b_k\right) \quad (3.2)$$

com  $\alpha_k(t) := 2g_k(1 - e^{i\omega_k t})/\omega_k$ . Tome  $|\psi\rangle$  um estado qualquer do ambiente. A atuação do operador da Eq. 3.2 é descrita por:

$$\tilde{U}(t) |0\rangle \otimes |\psi\rangle = |0\rangle \otimes \prod_k D\left(-\frac{1}{2}\alpha_k(t)\right) |\psi\rangle \quad (3.3)$$

$$\tilde{U}(t) |1\rangle \otimes |\psi\rangle = |1\rangle \otimes \prod_k D\left(+\frac{1}{2}\alpha_k(t)\right) |\psi\rangle \quad (3.4)$$

onde o operador deslocamento  $D(\alpha) = \exp(b^\dagger \alpha - b \alpha^*)$ , unitário, que obedece a relação  $D^\dagger(\alpha) = D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha)$  gera estados coerentes ao ser aplicado em um estado de vácuo<sup>1</sup>.

Com estes elementos postos, podemos calcular a evolução tanto para o qubit, quanto para o ambiente. Seja  $\varrho(0)$  um estado inicial do sistema conjunto (qubit + ambiente), o estado evoluído será dado por  $\varrho(t) := U(t) \varrho(0) U^\dagger(t)$  onde  $U(t) = e^{-iH_0 t} \tilde{U}(t)$  é o operador unitário de evolução temporal na versão de Schrödinger. Assumiremos que nosso estado inicial será um produto tensorial entre o qubit e os estados do campo,  $\varrho(0) = \rho(0) \otimes \prod_k R_{kT}$ , ou seja, o qubit e o ambiente estão descorrelacionados. Aqui,  $R_{kT}$  é a matriz densidade canônica para o modo  $k$  do campo,  $R_{kT} := (1 - e^{-\beta \omega_k}) \sum_n e^{-\beta \omega_k n} |n\rangle \langle n|$ .

A evolução do qubit é dada tomando o traço parcial nos graus de liberdade do ambiente, isto é,  $\rho(t) = \text{Tr}_R \varrho(t)$ . A análise dos elementos de matriz de  $\rho(t)$ , nos dá a importância deste modelo. Segue que as populações do qubit — diagonais — se mantêm constantes ao longo da evolução, ou seja,  $\rho_{00}(t) = \rho_{00}(0) := \langle 0 | \rho(0) | 0 \rangle$  e  $\rho_{11}(t) = \rho_{11}(0) := \langle 1 | \rho(0) | 1 \rangle$ . Por outro lado, as coerências — não diagonais — apresentam um fator de atenuação,  $\rho_{10}(t) = \rho_{01}^*(t) = \rho_{10}(0) := \langle 1 | \rho(0) | 0 \rangle e^{-\Gamma(t)}$ , com:

$$\Gamma(t) = \sum_k \frac{4|g_k|^2}{\omega_k^2} (1 - \cos(\omega_k t)) \coth\left(\frac{\beta \omega_k}{2}\right) \quad (3.5)$$

Desta forma, para um fator de atenuação monotonamente crescente, os termos não diagonais são suprimidos exponencialmente de forma que, para tempo infinito, o estado evoluído está em um estado incoerente na base dos autoestados de  $\sigma_z$ ,  $\rho(t \rightarrow \infty) = \rho_{00} |0\rangle \langle 0| + \rho_{11} |1\rangle \langle 1|$ , perdendo qualquer informação acerca das coerências.

A diagonalização do qubit é feita utilizando a representação de Bloch,  $\rho = (\mathbb{I} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma})/2$ . O vetor de Bloch para o estado evoluído  $\rho(t)$  é dado por  $\vec{r}_{t0} \{q_t \sin \theta_0 \cos(\phi_0 + \omega_0 t), q_t \sin \theta_0 \sin(\phi_0 + \omega_0 t), \cos \theta\}$  com  $q_t := \exp\left(-\frac{d\Gamma(t)}{dt} t\right)$ . A diagonalização deste estado nos dá  $\rho(t) = \sum_{j=\pm} p_j |\pm\rangle \langle \pm|$  onde:

$$p_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm r_0 \xi_t); \quad |\pm\rangle = \frac{1}{N_{\pm}} [(\cos \theta_0 \pm \xi(t)) |0\rangle + e^{i(\phi_0 + \omega_0 t)} q_t \sin \theta_0 |1\rangle] \quad (3.6)$$

com  $\xi(t) := \sqrt{\cos^2 \theta_0 + q_t^2 \sin^2 \theta_0}$  e o fator de normalização  $N_{\pm} := \sqrt{(\cos \theta_0 \pm \xi_t)^2 + q_t^2 \sin^2 \theta_0}$

De maneira similar, a evolução do ambiente é obtida tomando o traço parcial sobre o qubit, i.e.,  $\rho_R(t) = \text{Tr}_Q \varrho(t)$ :

$$\begin{aligned} \rho_R(t) = & \rho_{00}(0) \prod_k e^{-ib_k^\dagger b_k \omega_k t} D\left(-\frac{1}{2} \alpha_k\right) R_{kT} D\left(\frac{1}{2} \alpha_k\right) e^{ib_k^\dagger b_k \omega_k t} \\ & + \rho_{11}(0) \prod_k e^{-ib_k^\dagger b_k \omega_k t} D\left(\frac{1}{2} \alpha_k\right) R_{kT} D\left(-\frac{1}{2} \alpha_k\right) e^{ib_k^\dagger b_k \omega_k t} \end{aligned} \quad (3.7)$$

<sup>1</sup> Uma discussão mais aprofundada acerca do operador deslocamento — como suas propriedades e identidades — pode ser encontrado em [10]

Este resultado já nos mostra que explorar a dinâmica de sistemas com infinitos graus de liberdade pode se tornar uma tarefa rapidamente complexa. Restringiremos nosso modelo, exato até então, por meio de uma aproximação de acoplamento fraco, onde manteremos apenas termos lineares em  $g_k$ . Observamos que a Eq. 3.7 depende do acoplamento apenas via operador deslocamento, de forma que devemos considerar a aproximação linear  $D(\alpha_k/2) = (b_k^\dagger \alpha_k - b_k \alpha_k^*)/2$ , nos dando:

$$\rho_R(t) = \rho_R(0) + (\rho_{11}(0) - \rho_{00}(0)) \prod_k (1 - e^{-\beta \omega_k}) \left[ \sinh\left(\frac{\beta \omega_k}{2}\right) (\alpha_k(t) e^{-i\omega_k t} e^{-\beta \omega_k/2} b_k^\dagger + \alpha_k^*(t) e^{i\omega_k t} e^{\beta \omega_k/2} b_k) \right] \exp\left(-\beta \omega_k b_k^\dagger b_k\right) \quad (3.8)$$

A aproximação gera esta forma mais simples, onde fica evidente o estado evoluído como o estado inicial + uma perturbação. A diagonalização segue da teoria de perturbação de primeira ordem, que seleciona todos os termos lineares no acoplamento. Sendo  $|n\rangle = \prod_k |n\rangle_k$ , a correção para os autovalores é dada por  $\langle n | \text{Perturbação} | n \rangle = 0$  pois  ${}_k \langle n | b_k | n \rangle_k = {}_k \langle n | b_k^\dagger | n \rangle_k = 0$ , portanto os autovalores são dados por  $P_n = \prod_k P_n^k$  onde  $P_n^k$  é o autovalor de  $R_{kT}$ :

$$P_n^k = (1 - e^{\beta \omega_k}) e^{-\beta \omega_k n} \quad (3.9)$$

Já os autoestados serão dados por  $|\psi_n\rangle = \prod_k |\psi_n^k\rangle$  com:

$$|\psi_n^k\rangle = |n\rangle_k + (\rho_{11}(0) - \rho_{00}(0)) \frac{e^{-i\omega_k t} - 1}{\omega_k} \left( g_k \sqrt{n+1} |n+1\rangle_k - g_k^* \sqrt{n} |n-1\rangle_k \right) \quad (3.10)$$

Juntos, estes resultados satisfazem  $\rho_R(t) |\psi_n\rangle = P_n |\psi_n\rangle$  até a primeira ordem no acoplamento.

### 3.2 Investigação dos Quantum Speed Limit

Esta seção contém os resultados originais desta tese. Nos voltamos à análise dos QSL tanto para o qubit quanto para o ambiente. Desejamos obter uma relação qualitativa entre os QSLs mais *tight* tanto para o qubit, quanto para o ambiente. Recordamos que, de acordo com o teorema de MCP enunciado na §2.2, há uma infinidade de métricas Riemmanianas no espaço gerado pelos operadores densidade. Discutimos que apenas duas métricas nos interessa (Fisher Quântica e Wigner-Yanase) pois são as únicas que possuem uma expressão analítica para suas distâncias geodésicas. Nossa análise buscará a métrica mais *tight* entre estas duas métricas, ou seja se  $\delta^{QF} \leq \delta^{WY}$  ou se  $\delta^{WY} \leq \delta^{QF}$  com as distâncias relativas  $\delta_\gamma^f$  dadas pela Eq. 2.34.

Algumas considerações precisam ser feitas. A nossa análise se restringirá a apenas um modo do ambiente ( $k = 1$ ). Por certo, este modelo microscópico de *dephasing* vale neste caso, entretanto, da mesma forma que se observa a perda coerência, há o refluxo de informação de volta ao sistema, reestabelecendo a coerência (vide a periodicidade da 3.5 para  $k = 1$ ). De certa forma, nosso modelo se afasta ligeiramente da análise feita por Pires [5], que utiliza mapas dinâmicos para caracterizar o

canal de *dephasing*<sup>2</sup>. Portanto, nos limitamos ao regime de tempo em que há decoerência para que os resultados descritos a seguir sejam complementares a [5].

Para o qubit, utilizando a decomposição espectral explicitada na seção passada, as Eqs. 2.35 ficam:

$$\mathcal{F}_t = \frac{r_0 q_t^2 \sin^4 \theta_0}{4\xi_t^2(1 - r_0^2 \xi_t^2)} \left( \frac{dq_t}{dt} \right)^2 \quad (3.11)$$

$$\mathcal{Q}_t^f = \frac{r_0^2 \sin^2 \theta_0 c_f(p_+, p_-)}{8\xi_t^2} \left[ \omega_0 \xi_t^2 q_t^2 + \cos^2 \theta \left( \frac{dq_t}{dt} \right)^2 \right] \quad (3.12)$$

As funções  $c_f(p_+, p_-)$  dependem da escolha das funções de MC. Para a métrica de Fisher e de Wigner-Yanase, respectivamente dadas pelas funções das Eqs. 2.16 e 2.17, temos que:

$$c_{QF}(p_+, p_-) = 2; \quad c_{WY}(p_+, p_-) = \frac{8}{(\sqrt{1 - \xi_t r_0} + \sqrt{1 + \xi_t r_0})^2} \quad (3.13)$$

Entre o estado inicial e evoluído há uma curva  $\gamma$  ligando-os, e, dado uma escolha de função de MC, a distância é  $l_\gamma^f = \int_0^\tau \sqrt{\mathcal{F}_t + \mathcal{Q}_t^f} dt$ .

As distâncias geodésicas, por sua vez, possuem expressões analíticas para quaisquer par de qubits e são dadas por<sup>3</sup>:

$$\mathcal{L}^{QF}(\rho(0), \rho(\tau)) = \arccos \sqrt{\frac{1}{2} \left[ 1 + \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_\tau + \sqrt{(1 + |\vec{r}_0|^2)(1 + |\vec{r}_\tau|^2)} \right]} \quad (3.14)$$

$$\mathcal{L}^{WY}(\rho(0), \rho(\tau)) = \arccos \left( \frac{1}{4} \left[ \epsilon_0^+ \epsilon_\tau^+ + \epsilon_0^- \epsilon_\tau^- \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_\tau}{|\vec{r}_0| |\vec{r}_\tau|} \right] \right) \quad (3.15)$$

onde  $\epsilon_t^\pm := \sqrt{1 + |\vec{r}_t|^2} \pm \sqrt{1 - |\vec{r}_t|^2}$ .

Seguiremos com a busca ao QSL mais *tight* para a evolução do qubit. Veja que se a métrica de QF fornece o QSL mais *tight* que a métrica de WY, então devemos ter  $\delta^{QF} \leq \delta^{WY}$ . Daí, segue a desigualdade  $\Delta := \mathcal{L}^{QF} \ell^{WY} - \mathcal{L}^{WY} \ell^{QF} \geq 0$ . Na Fig. 1 vemos que o valor do acoplamento é crucial para a determinação do QSL mais *tight*. Ao passo que a força do acoplamento aumenta, saímos de um regime em que a métrica mais *tight* em todo espaço de estado é a métrica de Fisher (Fig. 1(c)), para o regime em que tal métrica é a de Wigner-Yanase (Fig. 1(a)). É importante notar que o trabalho de Pires [5] evidencia que para o caso unitário, a métrica de QF é sempre mais *tight* que a de WY. Assim, o acoplamento, mesmo com apenas um único grau de liberdade do ambiente, é suficiente para o surgimento de QSLs mais *tights*.

<sup>2</sup> De fato, a caracterização por mapas dinâmicos representa o comportamento do nosso modelo microscópico para um número grande de modos de campo, cujas frequência de oscilação  $\omega_k$  variam linearmente, o chamado *banho Ôhmico*

<sup>3</sup> Uma derivação destas equações é encontrado no Apêndices C.5 e C.6 em [8]

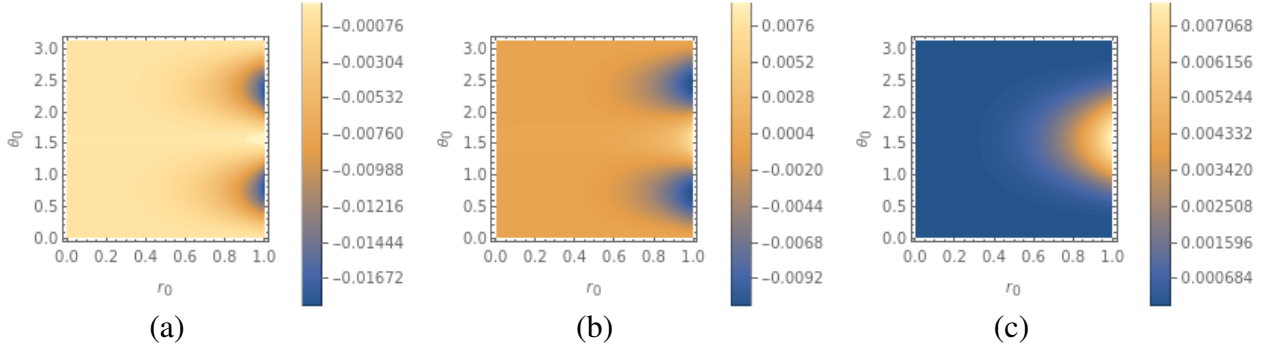


Figura 1 – Gráfico da quantidade  $\Delta = \mathcal{L}^{QF}\ell^{WY} - \mathcal{L}^{WY}\ell^{QF}$  em função  $r_0$  e  $\theta_0$ . Os parâmetros fixados são  $\beta = \omega_0 = \Omega = t = 1$  com acoplamento **(a)**  $g = 1.5$ ; **(b)**  $g = 0.5$ ; **(c)**  $g = 0.0001$ . Fonte: Elaborado pelo autor.

Podemos fazer uma análise similar para o ambiente, buscando o QSL mais *tight* em sua evolução. Como os autovalores são independentes do tempo (Eq. 3.9), então  $\mathcal{F}_t = 0$  e o cálculo de  $Q_t^f$  para a métrica de QF e de WY, respectivamente, são:

$$Q_t^{QF} = r_0^2 \cos^2(\theta_0) \tanh\left(\frac{\beta\Omega}{2}\right) |g|^2 - \frac{16r_0^4 \cos^4(\theta_0) \cosh^2\left(\frac{\beta\Omega}{2}\right) \text{sech}(\beta\Omega) \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) |g|^4}{\Omega^2} \quad (3.16)$$

$$Q_t^{WY} = 2r_0^2 \cos^2(\theta_0) \tanh\left(\frac{\beta\Omega}{4}\right) |g|^2 - \frac{16r_0^4 \cos^4(\theta_0) \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) |g|^4}{\Omega^2} \quad (3.17)$$

com  $\Omega$  a frequência do grau de liberdade para o ambiente.

Para que a distância  $\ell_\gamma^f = \int_0^\tau \sqrt{\mathcal{F}_t + Q_t^f} dt$  esteja consistente com nossa aproximação linear no acoplamento para o ambiente, devemos ficar apenas com os primeiros termos nas Eqs. 3.16 e 3.17. As distâncias geodésicas, por sua vez, são calculadas numericamente. Na Figura 2 traçamos as distâncias  $\ell_\gamma^f$  e  $\mathcal{L}^f$  para as métrica de QF e WY, com o estado inicial do qubit ( $r_0 = 1/4$ ;  $\theta = \pi/4$ ) no intervalo de tempo que ocorre decoerência do qubit.

Podemos, agora, fazer a análise de *tightness* das métricas para o ambiente. Mais uma vez, esta análise se baseia em observar a positividade ou negatividade de  $\Delta$ . Fazemos isso vendo a evolução temporal de  $\Delta$  para o estado inicial do qubit  $r_0 = 1/4$ ;  $\theta_0 = \pi/4$  e parâmetros fixados  $\beta = \omega_0 = \Omega = 1$ . Para o qubit (Fig. 3 (a)), observamos que  $\Delta$  é suave e sempre maior que zero. Situação oposta ocorre para o grau de liberdade do ambiente (Fig. 3 (b)), onde não há uma evolução suave da quantidade  $\Delta$  que, por vezes, assume valores negativos. A quebra da suavidade pode estar associada a: (a) quebra da aproximação linear no acoplamento, uma vez que as distâncias geodésicas são calculadas numericamente, e (b) a baixa ordem de magnitude ( $10^{-15}$ ), próxima a precisão de máquina ( $10^{-16}$ ). Portanto, não é possível estabelecer a métrica mais *tight* para a evolução do grau de liberdade do ambiente sob as aproximações feitas e/ou traçar quaisquer especulações teóricas acerca de analogias e correlações entre os QSLs e sistemas abertos evoluídos não-unitariamente.

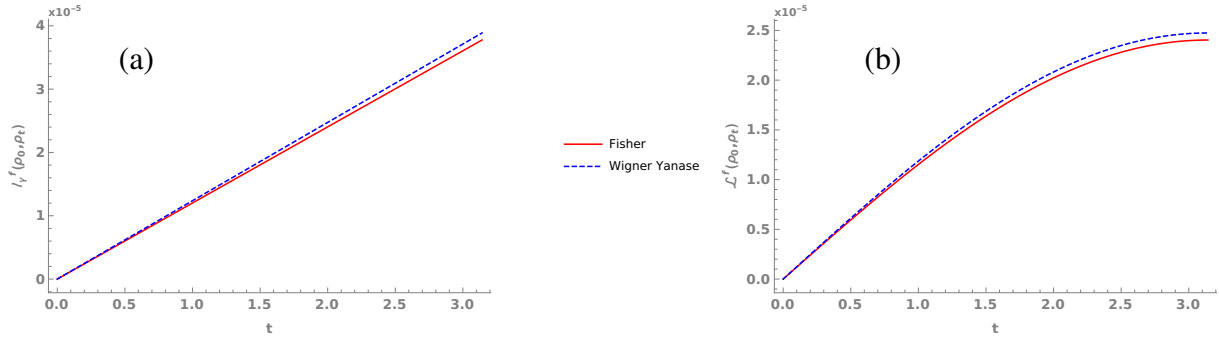


Figura 2 – Evolução temporal para (a) comprimento  $\ell_{\gamma}^f$  da curva  $\gamma$  dada pela dinâmica, e (b) distância geodésica entre o estado inicial e o estado evoluído por tempo  $t$ , ambas sob as métricas de Fisher e Wigner-Yanase, com parâmetros  $\beta = \Omega = t = 1$  e estado inicial do qubit em  $r_0 = 1/4$ ;  $\theta_0 = \pi/4$ . Fonte: Elaborado pelo autor.

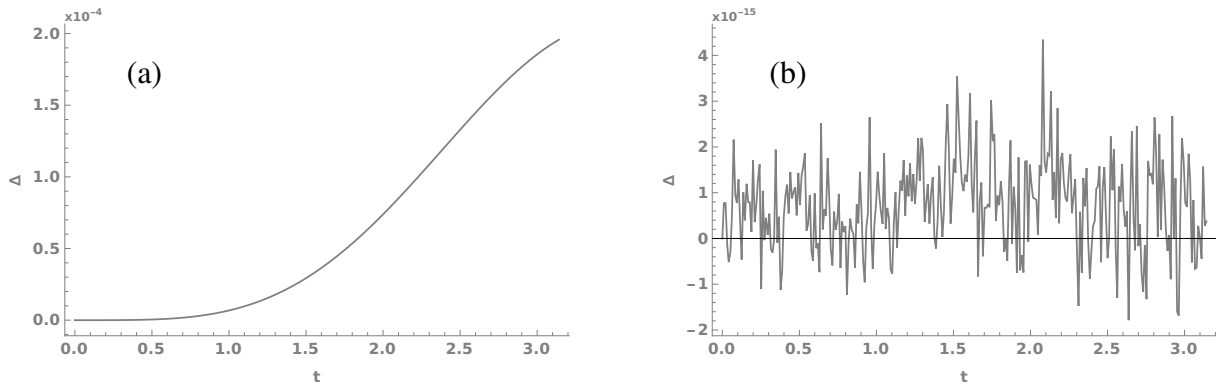


Figura 3 –  $\Delta = \mathcal{L}^{QF} \ell^{WY} - \mathcal{L}^{WY} \ell^{QF}$  em função do tempo para (a) o qubit (b) o grau de liberdade do ambiente. Utiliza-se os parâmetros fixos  $\beta = \omega_0 = \Omega = t = 1$  e o estado inicial do qubit em  $r_0 = 1/4$ ;  $\theta_0 = \pi/4$ . Fonte: Elaborado pelo autor.

## 4 CONCLUSÃO

Neste trabalho exploramos o conceito de QSLs a partir de uma abordagem geométrica e analisamos um exemplo de dinâmica não-unitária a fim de buscar uma interpretação mais profunda dos QSLs nestas dinâmicas.

Construímos nossos QSLs geométrico a partir da robusta formulação promovida por Pires [5], que explora a geometrização do espaço de estados na busca de uma infinidade de métricas Riemmanianas contrativas no espaço de estados. Os QSLs geométricos são originários do fato da distância geodésica constituir o menor comprimento possível dentre todas as curvas que ligam dois estados (Eq. 2.33). Para cada métrica existe um QSL geométrico associado. Esta formulação permite a generalização dos QSLs para quaisquer dinâmica — unitárias ou não. Por exemplo, para o caso unitário, encontra-se a conexão entre o tempo mínimo de evolução e recursos informacionais e energéticos no caso unitário.

O nosso caso de estudo é o modelo de *dephasing*, descrito na seção 3.1. Buscou-se encontrar a métrica mais *tight* entre a de Fisher e de Wigner-Yanase, tanto para o qubit, quanto para o ambiente. Assumiu-se um acoplamento fraco entre o qubit e um grau de liberdade do ambiente e, apesar de encontrarmos resultados similares a de Pires para o qubit, a análise para o ambiente foi inconclusiva. Naturalmente, indicamos que desenvolvimentos futuros na busca de interpretação para QSLs, baseadas em limitações de recursos físicos em sistemas abertos (não-unitários) deveriam: (i) replicar a análise feita neste trabalho com maior precisão de máquina ;(ii) buscar resultados analíticos, em regime de acoplamento forte, para o modelo de *dephasing*; e (iii) explorar outros modelos de evolução não-unitária. Assim, poderemos avançar o conceito de QSLs para conexões mais profundas com outras áreas de desenvolvimento quântico.

## REFERÊNCIAS

- 1 MANDELSTAM, L.; TAMM, I. The uncertainty relation between energy and time in non-relativistic quantum mechanics. **Journal of Physics URSS**, v. 9, n. 4, p. 249, 1945. Disponível em: [https://doi.org/10.1007/978-3-642-74626-0\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-642-74626-0_8). Acesso em: 16.11.2021.
- 2 ANANDAN, J.; AHARONOV, Y. Geometry of quantum evolution. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 65, p. 1697–1700, Oct 1990. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.65.1697>. Acesso em: 24.11.2021.
- 3 MARGOLUS, N.; LEVITIN, L. B. The maximum speed of dynamical evolution. **Physica D — nonlinear phenomena**, v. 120, n. 1, p. 188–195, 1998. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(98\)00054-2](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(98)00054-2). Acesso em: 24.11.2021.
- 4 DEFFNER, S.; CAMPBELL, S. Quantum speed limits: from heisenberg’s uncertainty principle to optimal quantum control. **Journal of Physics A — mathematical and theoretical**, IOP Publishing, v. 50, n. 45, p. 453001, oct 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1751-8121/aa86c6>. Acesso em: 24.11.2021.
- 5 PIRES, D. P. *et al.* Generalized geometric quantum speed limits. **Physical Review X**, American Physical Society, v. 6, p. 021031, Jun 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevX.6.021031>. Acesso em: 24.11.2021.
- 6 GIOVANNETTI, V.; LLOYD, S.; MACCONE, L. Quantum limits to dynamical evolution. **Physical Review A**, American Physical Society, v. 67, p. 052109, May 2003. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.67.052109>. Acesso em: 24.11.2021.
- 7 LEVITIN, L. B.; TOFFOLI, T. Fundamental limit on the rate of quantum dynamics: The unified bound is tight. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 103, p. 160502, Oct 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.160502>. Acesso em: 24.11.2021.
- 8 PIRES, D. P. **Geometria da informação quântica: uma abordagem geral acerca do tempo de evolução**. 2017. 219 p. Tese (Doutorado) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2017.
- 9 PALMA, G. M.; SUOMINEN, K.-a.; EKERT, A. Quantum computers and dissipation. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A — mathematical, physical and engineering sciences**, v. 452, n. 1946, p. 567–584, 1996. Disponível em: <https://doi.org/10.1098/rspa.1996.0029>. Acesso em: 24.11.2021.
- 10 CAHILL, K. E.; GLAUBER, R. J. Ordered expansions in boson amplitude operators. **Physical Review**, American Physical Society, v. 177, p. 1857–1881, Jan 1969. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.177.1857>. Acesso em: 24.11.2021.